Problema clasa a IV-a

Să se determine numărul natural $\overline{abcd}$ știind că $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 2017$

Costica Ambrinoc, Rm Sărat

Soluție

Avem $a \neq 0$.

Pentru $a \geq 1$ suma din membrul stâng este mai mare decât 2017 - - - - - - - - - 1 punct

Deci $a = 1$ și avem $\overline{1bcd} + \overline{1bc} + \overline{1b} + 1 = 2017$

$\Leftrightarrow \overline{bcd} + \overline{1bc} + \overline{1b} = 1016$ 1 punct

Dacă $b \leq 7$ membrul stâng este maxim

$799 + 179 + 17 = 995 < 1016$ 1 punct

Dacă $b = 9$ avem $\overline{9cd} + \overline{19c} + 19 = 1016$

$\Leftrightarrow \overline{9cd} + \overline{19c} = 997$

Membrul stâng este un număr de 4 cifre deci $b \neq 9$ 1 punct

Rămâne $b = 8$ și atunci:

$\overline{8cd} + \overline{18c} + \overline{18} = 1016$

$\Leftrightarrow \overline{8cd} + \overline{18c} = 998 \Leftrightarrow$ ~~$cd + c = 18$~~ 1 punct

Dacă $c = 0$ ~~membrul~~ atunci $d = 8$ și $808 + 180 = 988 \neq 998$

Dacă $c = 2$ membrul stâng este un număr de 4 cifre

Deci $c = 1$ 1 punct

Avem $\overline{81d} + 181 = 998$,

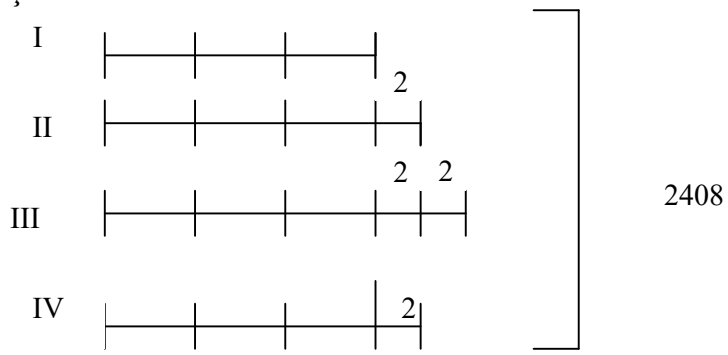
deci $d = 7$ și numărul cerut este 1817... 1 punct

Problemă propusă pentru clasa a IV a

Suma a patru numere naturale este 2408.Aflaţi numerele ştiind că primele trei sunt pare consecutive , iar al patrulea este o treime din suma celorlalte trei.

Marin Marcela , profesor , Rm. Sărat

Soluţie



Pentru a pune în evidenţă mai uşor o treime reprezentăm primul număr prin trei părţi egale. (3 pct)
O treime din suma primelor trei este egală cu al doilea numar. (2 puncte)
2408 - 8 = 2400 (suma celor 12 parţi egale)
2400:12 = 200
I = 200 · 3 = 600
I = 600+2 = 602
III = 602+2 = 604
IV = II = 602 (2 puncte)

Problema 3.

Soluţie. a) Aranjăm termenii şirului câte trei, pe linii:

1 4 7

8 11 14

15 18 21

22 25 28

29 ....

.....

Urmărind coloanele de mai sus, observăm că pe fiecare coloană fiecare număr este cu 7 mai mare decât precedentul. Prin urmare, următorii 4 termeni ai şirului sunt 32, 35, 36, 39

..... **2 puncte**

b) Deoarece $2016:3=672$, deducem că trebuie să avem 672 linii complete.

..... **5 puncte**

Urmărim acum numai ultima coloană (coloana pe care se află al 2016-lea termen al şirului) şi obţinem şirul 7, 14, 21, 28, ..., x, unde x este al 672-lea termen. Observăm că fiecare termen creşte cu 7 faţă de precedentul, deci pentru a determina poziţia în şir trebuie să împărţim termenii şirului la 7. Avem că:

$7:7=1$

$14:7=2$

$21:7=3$

$28:7=4$

.....

$x:7=672$

Deci, $x=672\times 7=4704$.

Prin urmare, al 2016-lea termen al şirului dat iniţial în problemă este 4704.

şi al 2017 termen este 4705 ..... **2 puncte**

c) Deoarece $100:3=33$ rest 1, deducem că vor fi 33 de linii complete şi încă un termen de pe linia 34. Având în vedere regula dedusă la subpunctul b) obţinem că ultimul număr de pe linia 34 este $34\times 7=238$, iar celelalte numere de pe linia 34 sunt $238-6=232$ şi $238-3=235$. Deci, pe linia 34 sunt numerele 232, 235, 238, iar numerele de pe linia 33 sunt $232-7=225$, $235-7=228$, $238-7=231$

..... **1 puncte**

Notând cu S_n suma numerelor de pe linia n configuraţia tabelului va fi:

1	4	7	$S_1 = 12$
8	11	14	$S_2 = 33$
15	18	21	$S_3 = 54$
22	25	28	$S_4 = 75$
29	32	35	$S_5 = 96$
.....			
225	228	231	$S_{33} = 684$
232.....			

Suma primilor 100 de termeni ai şirului este: $S = (12+33+54+...+684)+232$

..... **1 punct**

Mai întâi calculăm suma $A = 12+33+54+...+684$, care are 33 de de termeni corespunzători celor 33 de linii şi fiecare termen este cu 21 mai mare decât precedentul.

$$A = 12+33+54+...+642+663+684$$
$$A = 684+663+642+...+54+33+12$$

.....

$$2\times A = \underbrace{696+696+696+...+696+696+696}_{\text{de 33 ori}}$$

Deci, $2\times A = 696\times 33$
$A = 696\times 33 : 2$
$A = 11484$

Prin urmare, $S = (12+33+54+...+684)+232 = 11484+232 = 11716$

..... **1 puncte**

Răspuns:

a) 32, 35, 36, 39
b) 4705
c) 11716

Problemă 1 pentru_Clasa a V-a,

Dacă a şi b sunt cifre, atunci rezolvaţi ecuaţia $(\overline{ab}+\overline{ba})(\overline{ab}-\overline{ba})=x^2$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie. Evident x este număr natural. Avem:

$$(\overline{ab}+\overline{ba})(\overline{ab}-\overline{ba})=(11a+11b)(9a-9b)=3^2\cdot 11\cdot(a+b)(a-b).$$

Deci, $3^2\cdot 11\cdot(a+b)(a-b)=x^2$; rezultă că $(a+b)(a-b)=11\cdot k^2$, (1). Deoarece a şi b sunt cifre, $a-b<10$ şi rezultă că $a-b$ nu poate fi multiplu de 11. Aşadar, $a+b$ este multiplu de 11, dar cum $a+b\le 18$, rezultă $a+b=11$. Din (1) obţinem $a-b=k^2$, dar cum $a-b<10$, obţinem $k\in\{1,4,9\}$; convine doar $k=1$, de unde $a=6, b=5$.

În concluzie, $(65-56)(65+56)=9\cdot 121=33^2$.

Obţinem singura soluţie: $a=6, b=5, x=33$.

Problema (cl. V) Fie $a_n = \underbrace{20172017...2017}_{de\ n\ ori\ 2017}$. Arătaţi că pentru oricare p număr prim, $p > 5$, există un număr natural n astfel încât $p|a_n$.

Costin Negrii, profesor, Bucureşti

Soluţie

Fie p este un număr prim mai mare ca 5 şi şirul de numere:
$a_1 = 2017$, $a_2 = 20172017$, ..., $a_p = \underbrace{20172017...2017}_{de\ p\ ori\ 2017}$.

Dacă există un număr natural nenul $i \leq p$ astfel încât $p|a_i$, atunci problema este rezolvată.

Presupunem că nu există un astfel de i. Aşadar numerele $a_1,\ a_2, ..., a_p$ au ca resturi posibile la împărţirea cu p numerele $1, 2, 3, ..., p-1$, adică $p-1$ resturi.

Conform principiului lui Dirichlet, având p numere şi $p-1$ resturi, obţinem că există $1 \leq i < j \leq p$ astfel încât a_i şi a_j au acelaşi rest la împărţirea la p.

În concluzie $a_j - a_i = \underbrace{20172017...2017}_{de\ j-i\ ori\ 2017}\underbrace{000....0}_{de\ 4i\ ori} = \underbrace{20172017...2017}_{de\ j-i\ ori\ 2017} \cdot 10^{4i}$ este divizibil cu p, cum $p > 5$ este număr prim, deci $(p, 10) = 1$, rezultă că $p \mid \underbrace{20172017...2017}_{de\ j-i\ ori\ 2017}$.

Problema 3

Să se arate că numărul 2017^{2017} se poate scrie atât ca o sumă de două pătrate perfecte cât şi ca o diferenţă de două pătrate perfecte.

Marin Simion, Rm. Sărat
Costin Negrii, Bucureşti

Solutie
Il vom scrie mai intai pe 2017 atât ca o sumă de două pătrate perfecte cât şi ca o diferenţă de două pătrate perfecte.

a) Cum ultima cifra a unui patrat $U(x^2) \in \{0,1,4,5,6,9\}$ pentru orice x ∈ N, observam ca ultima cifra celor doua patrate trebuie sa fie 1 si 6.....0.5 puncte
Pentru x = 1, atunci $y^2 = 2017 - 1^2 = 2016 \Rightarrow$ contradictie..... 0.5 puncte
Pentru x = 9, avem $y^2 = 2017 - 9^2 = 1936 \Rightarrow$ y = 44, asadar
$2017 = 9^2 + 44^2$.. .....1 punct
$2017^{2017} = 2017^{2016} \cdot 2017 = 2017^{2016}(9^2 + 44^2) = (2017^{1008} \cdot 9)^2 + (2017^{1008} \cdot 44)^2$.
.....2 puncte
b)
$2017 = 2017 \cdot 1 = (1009 + 1008)(1009 - 1008) = 1009^2 - 1009 \cdot 1008 + 1008 \cdot 1009 - 1008^2 = 1009^2 - 1008^2$
.....2 puncte
$2017^{2017} = 2017^{2016} \cdot 2017 = 2017^{2016}(1009^2 - 1008^2) = (2017^{1008} \cdot 1009)^2 - (2017^{1008} \cdot 1008)^2$
.....1 punct

Problema 1

1. Știind că:
$\frac{2017\cdot 1}{S+1}+\frac{2017\cdot 2}{P+2}+\frac{2017\cdot 3}{E+3}+\frac{2017\cdot 4}{R+4}+\frac{2017\cdot 5}{A+5}+\frac{2017\cdot 6}{N+6}+\frac{2017\cdot 7}{Ț+7}+\frac{2017\cdot 8}{E+8}=14119$

, aflați: $\frac{S}{S+1}+\frac{P}{P+2}+\frac{E}{E+3}+\frac{R}{R+4}+\frac{A}{A+5}+\frac{N}{N+6}+\frac{Ț}{Ț+7}+\frac{E}{E+8}=?$

Rezolvare:

$$2017\cdot\left(\frac{1}{S+1}+\frac{2}{P+2}+\frac{3}{E+3}+\frac{4}{R+4}+\frac{5}{A+5}+\frac{6}{N+6}+\frac{7}{Ț+7}+\frac{8}{E+8}\right)=14119 \;\Big|\div 2017$$

$$\frac{1}{S+1}+\frac{2}{P+2}+\frac{3}{E+3}+\frac{4}{R+4}+\frac{5}{A+5}+\frac{6}{N+6}+\frac{7}{Ț+7}+\frac{8}{E+8}=7$$

$$\frac{S}{S+1}+\frac{P}{P+2}+\frac{E}{E+3}+\frac{R}{R+4}+\frac{A}{A+5}+\frac{N}{N+6}+\frac{Ț}{Ț+7}+\frac{E}{E+8}=$$

$$=\frac{S+1-1}{S+1}+\frac{P+2-2}{P+2}+\frac{E+3-3}{E+3}+\frac{R+4-4}{R+4}+\frac{A+5-5}{A+5}+\frac{N+6-6}{N+6}+\frac{Ț+7-7}{Ț+7}+\frac{E+8-8}{E+8}=$$

$$=1-\frac{1}{S+1}+1-\frac{2}{P+2}+1-\frac{E3}{E+3}+1-\frac{4}{R+4}+1-\frac{5}{A+5}+1-\frac{6}{N+6}+1-\frac{7}{Ț+7}+1-\frac{8}{E+8}$$

$$=8-\left(\frac{1}{S+1}+\frac{2}{P+2}+\frac{3}{E+3}+\frac{4}{R+4}+\frac{5}{A+5}+\frac{6}{N+6}+\frac{7}{Ț+7}+\frac{8}{E+8}\right)$$

$$=8-7=1$$

Problema (cl. VI)
Fie $M = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$, $n \geq 2$, unde $x_k^2 + 1 \leq x_{k-1} \cdot x_k$ pentru orice k natural, $2 \leq k \leq n$.
a) Arătaţi că $0 \notin M$.
b) Ordonaţi crescător elementele mulţimii M.
c) Dacă media aritmetică a tuturor elementelor lui M este 2017, arătaţi că $x_1 > 2017$.

Costin Negrii, profesor, Bucureşti

Soluţie
a) Din $x_k^2 + 1 \leq x_{k-1} \cdot x_k \Rightarrow 1 \leq x_{k-1} \cdot x_k - x_k^2 = x_k(x_{k-1} - x_k)$, $x_k, x_{k-1} \in M$.
Dacă $x_k = 0$, atunci obţinem că $1 \leq 0$, contradicţie.
b) Dacă $x_{k-1} - x_k \leq 0$, atunci $x_k \cdot (x_{k-1} - x_k) \leq 0$, dar $1 \leq x_k \cdot (x_{k-1} - x_k)$, aşadar $x_{k-1} > x_k$ pentru orice k natural, $2 \leq k \leq n$.
Deci $x_n < x_{n-1} < ... < x_1$.
c) Din $x_n < x_{n-1} < ... < x_1 \Rightarrow x_1 + x_2 + ... + x_n < \underbrace{x_1 + x_1 + ... + x_1}_{de\ n\ ori} = n \cdot x_1$.
Împărţim inegalitatea obţinută prin $n (n \geq 2)$ şi obţinem:

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} < x_1 \Leftrightarrow m_a < x_1.$$

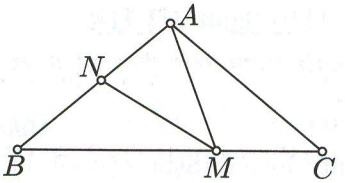
Cum $m_a = 2017$, rezultă concluzia.

Problema 3

În triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$ şi $m(\angle A) = 100^\circ$ considerăm punctele punctele $M \in (BC)$şi $N \in (AB)$ astfel încât $[BM] \equiv [BA]$şi $[BN] \equiv [CM]$. Determinaţi măsura unghiului BNM.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Solutie



Soluţie. Unind A cu M avem $\triangle BMN \equiv \triangle CAM$ ($[BM] \equiv [AB] \equiv [AC]$, $[BN] \equiv [CM]$ şi $\sphericalangle NBM \equiv \sphericalangle MCA$), de unde deducem $[AM] \equiv [NM]$.

Dacă notăm $\mathrm{m}(\sphericalangle BMN) = \alpha$, atunci $\mathrm{m}(\sphericalangle MAC) = \alpha$ şi $\mathrm{m}(\sphericalangle MNA) = \mathrm{m}(\sphericalangle NAM) = 100^\circ - \alpha$. Deoarece unghiul MNA este unghi exterior triughiului BMN putem scrie $100^\circ - \alpha = 40^\circ + \alpha$, de unde $\alpha = 30^\circ$ şi de aici $\mathrm{m}(\sphericalangle BNM) = 110^\circ$.

Problema 1

Rezolvati in multimea numerelor naturale ecuatia:

$\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{y}\right)+\frac{1}{y}\left(1+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{29}{xyz}-1,$ unde x, y, z sunt numere naturale nenule.

Rezolvare:

Se aduce la forma: xyz+xy+xz+yz+x+y+z=29 /+1 (1p)

Grupam si dam factor comun: xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=30=

(z+1)(xy+x+y+1)=30 (2p)

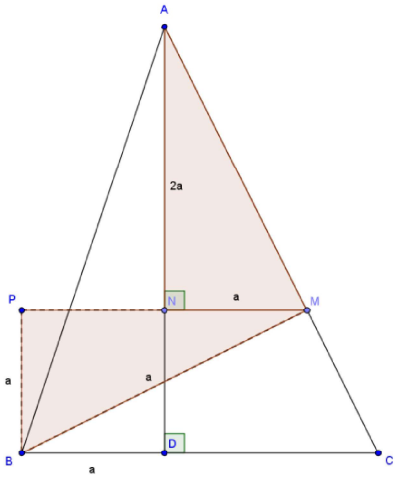
(z+1)(x+1)(y+1)=30 (2p)

(x, y, z)∈{(1;2;4);(2;1;4); (4;1;2); (1;4;2); (2;4;1); (4;2;1)} (2p)

Problema 2

În triunghiul ascuțitunghic ABC construim $AD \perp BC$, cu $D \in BC$. Fie punctul $M \in (AC)$ astfel încât $AM = 2 \cdot MC$. Fie N proiecția lui M pe AD. Demonstrați că dacă $[BD] \equiv [DN] \equiv [NM]$ atunci $m(BAC) = 45°$.

Soluție



Notăm $BD = DN = NM = a$.

$MN \parallel CD$ (perpendiculare pe aceeași dreaptă). Din Teorema lui Thales în ΔADC rezultă

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AN}{ND} = 2 \quad \Rightarrow \quad AN = 2 \cdot ND = 2a$$

Construim punctul *P*, simetricul lui M față de *N*. Rezultă $PM = 2a$ și $BDNP$ pătrat de latură *a*. Deci $BP = a$ și $m(BPM) = 90°$.

$\Delta BPM \equiv \Delta MNA$ (cazul C.C.) $\Rightarrow$ $[BM] \equiv [MA]$ și BMP complementar cu AMN, de unde rezultă $m(BMA) = 90°$. Deci ΔBMA este dreptunghic și isoscel, deci $m(BAC) = 45°$.

Problema 3

Alex și Cristi joacă de mai multe ori un joc în urma căruia câștigătorul primește x puncte , iar cel care pierde primește y puncte (x,y- naturale nenule, x>y). Dacă scorul final este 147-123 în favoarea lui Alex, iar Cristi a câștigat 6 partide, aflați numerele x și y.

Soluție: Dacă notăm cu a numărul partidelor câștigate de Alex , avem:
ax+6y=147, 6x+ay=123, de unde prin însumarea celor două relații obținem:
(a+6)(x+y)=270. Având în vedere că a+6≥13 și x+y≥3, rezultă că a+6=90 și x+y=3 sau a+6=54 și x+y=5 sau a+6=45 și x+y=6 sau a+6=27 și x+y=10 sau a+6=18 și x+y=15 sau a+6=15 și x+y=18 sau x+6=30 și x+y=9.
Dacă a=84 sau a=48 sau a=12 sau a=24, atunci ax+6y este un număr par , deci diferit de 147, deci aceste situații nu convin.
Analizăm cazurile rămase:

I) a+6=45→a=39; x=6−y→ 39(6−y)+6y=147→ $y=\frac{87}{33}\notin$ □

II) a+6=27→a=21; x=10−y→21(10−y)+6y=147→ $y=\frac{63}{15}\notin$ □

III) a+6=15→a=9; x=18−y→9(18−y)+6y=147→y=5; x=13. (soluția problemei).

Problemă pentru clasa a VIII-a

Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $x^2-2px-y^2=0$ unde p este număr prim diferit de 2

Soluție Avem $x_{1,2}=p\pm\sqrt{p^2+y^2}$ deoarece $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow p^2+y^2=k^2 \Leftrightarrow k^2-y^2=p^2 \Leftrightarrow (k-y)(k+y)=p^2 \Rightarrow$

$\begin{cases} k-y=1 \\ k+y=p^2 \end{cases} \Rightarrow k=\frac{p^2+1}{2}\in\mathbb{Z}$ deoarece $p\neq 2$ și din $\begin{cases} k-y=p \\ k+y=p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$,

$\begin{cases} x=2p \\ y=0 \end{cases}$

$y=\frac{p^2-1}{2}$ și $x=p\pm\frac{p^2+1}{2}$

În concluzie: $S=\left\{\left(\frac{(p+1)^2}{2},\frac{p^2-1}{2}\right),\left(\frac{-(p-1)^2}{2},\frac{p^2-1}{2}\right)\middle|\ p \text{ număr prim } \neq 2\right\}\cup\{(0,0),(2p,0)\}$

Problema 2

Să se determine minimul expresiilor:

a) E(x,y) = $4x^2 + 8y^2 - 4x + 16y + 11$

b) E(x,y) = $4x^2 + 8y^2 - 4xy - 4x + 16y + 11.$

Pentru ce valori ale lui x și y sunt atinse aceste minime?

Rezolvare

a) E(x,y) = $4x^2 - 4x + 1 + 8(y^2 + 2y + 1) + 2 =$

= $(2x - 1)^2 + 8(y + 1)^2 + 2 \geq 2 = E\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

(1p) (1p) (1p)

b) E(x,y) = $4x^2 - 4x(y + 1) + 8y^2 + 16y + 11=$

$= (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot (y + 1) + (y + 1)^2 + 8y^2 + 16y + 11 - (y + 1)^2 =$

$= (2x - y - 1)^2 + 7y^2 + 14y + 10 =$

$= (2x - y - 1)^2 + 7(y^2 + 2y + 1) + 3 =$

$= (2x - y - 1)^2 + 7(y + 1)^2 + 3 \geq 3$ (2p)

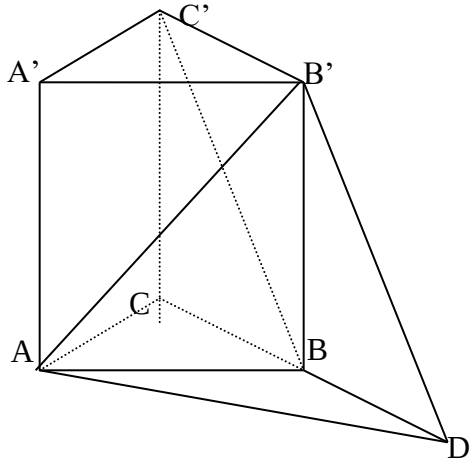
Valoarea minimă este atinsă când

$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$, de unde rezultă y = – 1 și x = 0. (2p)

.Problema 3

O prismă dreaptă ABCA'B'C'are bazele triunghiuri echilaterale cu laturile de lungime a (a>0). Ştiind că AB' şi BC' sunt perpendiculare, aflaţi volumul şi aria totală a prismei.

Soluţie:



Se prelungeşte latura [BC] cu [BD] astfel ca BD=BC=B'C'; [BD]||[B'C'], deci B'C'BD este paralelogram, de unde rezultă că B'D=C'B=AB';
$m(\angle(AB', BC')) = m(\angle(AB'D)) = 90°$.

În ΔACD: [AB] este mediană şi AB=$\frac{CD}{2}$, deci ΔACD este dr.; aplicând T.lui Pitagora se obţine că AD=$a\sqrt{3}$ şi din triunghiul dr. isoscel B'AD se obţine că

AB'=$\frac{a\sqrt{6}}{3}$; aplicând T. lui Pitagora în $\Delta ABB'$ se obţine BB'=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$A_t = \frac{a^2\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{2}; V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

Problemă (cls IX)

Să se arate că $\operatorname{tg} 2017^\circ \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (este irațional)

Corlică Dumitru, Rm Sărat

Soluție

Observație

Datorită faptului că $\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$,

$\operatorname{tg} 2a = \frac{2\operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$, $\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

avem că dacă $\operatorname{tg} a, \operatorname{tg} b \in \mathbb{Q}$ atunci

$\operatorname{tg}(a+b) \in \mathbb{Q}$, $\operatorname{tg}(a-b) \in \mathbb{Q}$, $\operatorname{tg} 2a \in \mathbb{Q}$.

Perioada tangentei este 180° deci

$\operatorname{tg} 2017^\circ = \operatorname{tg}(11 \cdot 180 + 37^\circ) = 37^\circ$.

P.p. că $\operatorname{tg} 37^\circ \in \mathbb{Q}$.

Dar $\operatorname{tg} 37^\circ \in \mathbb{Q}$ și $\operatorname{tg} 45^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \operatorname{tg} 8^\circ \in \mathbb{Q} \rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 16^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \operatorname{tg} 32^\circ \in \mathbb{Q}$.

Din $\operatorname{tg} 37^\circ \in \mathbb{Q}$ avem $\operatorname{tg} 5^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \operatorname{tg} 10^\circ \in \mathbb{Q}$

$\operatorname{tg} 32^\circ \in \mathbb{Q}$

Din $\left.\begin{matrix} \operatorname{tg} 10^\circ \in \mathbb{Q} \\ \operatorname{tg} 5^\circ \in \mathbb{Q} \end{matrix}\right| \Rightarrow \operatorname{tg} 15^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \operatorname{tg} 60^\circ \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ fals.

Problema 2

Fie funcția $f: R\backslash\{-1,0,1\} \to R$ cu proprietatea că $2f(x) - f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x - \frac{1}{x}$,oricare ar fi x$\epsilon R\backslash\{-1,0,1\}$.
Să se calculeze:

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{k^4+1}\right)\cdot f(k)$$

Rezolvare

x $\to \frac{1-x}{1+x}$ rezultă $2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - f(x) = \frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} \to$

$2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) - f(x) = \frac{4x}{x^2-1}$ (1) (2p)

$4f(x) - 2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 2x - \frac{2}{x}$ (2)

Adunând relațiile (1) și (2) obținem:

$3f(x) = 2x - \frac{2}{x} + \frac{4x}{x^2-1} = 2\cdot\left(\frac{x^2-1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}\right) = 2\cdot\left(\frac{x^4+1}{x^3-x}\right)$ (2)

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{3}{k^4+1}\right)\cdot f(k) = \sum_{k=2}^{n}\frac{2}{(k-1)(k+1)k} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)\cdot\frac{1}{k} =$$

(2p)

$$= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)}\right) = \left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n(n+1)}\right) =$$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)}$.

(1p)

Problemă propusă

clasa a IX-a

Să se arate că un triunghi ABC este ascuțitunghic dacă și numai dacă $|\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}|<R$, unde O este centrul cercului circumscris ΔABC și R este raza sa

Soluția 1. Avem: $|\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}|<R \Leftrightarrow |\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}|^2<R^2 \Leftrightarrow$

$(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC})^2<R^2 \Leftrightarrow \vec{OA}^2+\vec{OB}^2+\vec{OC}^2+2\vec{OA}\cdot\vec{OB}+2\vec{OB}\cdot\vec{OC}+2\vec{OC}\cdot\vec{OA}<R^2 \Leftrightarrow$

$3R^2+2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)<R^2 \Leftrightarrow 1+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C<0 \Leftrightarrow$

$2\cos^2 A+2\cos(B+C)\cdot\cos(B-C)<0 \Leftrightarrow \cos A(-\cos A-\cos(B-C))<0 \Leftrightarrow$

$-\cos A\cdot\cos B\cdot\cos C<0 \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C>0 \Leftrightarrow \Delta ABC$ este ascuțitunghic (un triunghi nu poate avea două unghiuri obtuze)

Soluția 2. Cu relația lui Sylvester din enunț devine $|\vec{OH}|<R \Leftrightarrow |\vec{OH}|^2<R^2 \Leftrightarrow OH^2<R^2 \Leftrightarrow OH<R$

Dar $OH=R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}$ și deci $R\sqrt{1-8\cos A\cos B\cos C}<R \Leftrightarrow$

$1-8\cos A\cos B\cos C<1 \Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C>0$ adică cele

Problemă cl. a X-a „Speranțe Râmnicene"

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația

$$2^{\sin^2 x}\cdot\cos x = 1.$$

Marcel Țena

Soluție. Punând $x=\frac{\pi}{2}-t$ ecuația se scrie $2^{\cos^2 t}\cdot\sin t = 1$ (1).

Ridicăm (1) la pătrat și obținem succesiv:

$$2^{2\cos^2 t}\cdot\sin^2 t = 1 \Leftrightarrow 2^{1+\cos 2t}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}=1 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{\cos 2t}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{\cos 2t}\cdot(1-\cos 2t)=1 \Leftrightarrow 1-\cos 2t = 2^{-\cos 2t} \quad (2).$$

Punând $-\cos 2t = u$, ecuația (2) devine $1+u=2^u$ (3).

Ecuația (3) are soluțiile $u_1=0$, $u_2=1$ și acestea sunt singurele soluții, deoarece dreapta de ecuație $y=1+u$ taie curba convexă de ecuație $y=2^u$ în cel mult două puncte.

Pentru $u=0$ avem $\cos 2t=0 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 t=0 \Leftrightarrow \sin t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Dar din (1) avem $\sin t>0$, prin urmare $\sin t=\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rezultă: $x=\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Pentru $u=1$ avem $\cos 2t=-1 \Leftrightarrow 1-2\sin^2 t=-1 \Leftrightarrow \sin t=\pm 1$

și cum $\sin t>0$, rezultă $\sin t=\cos x=1$.

Deducem: $x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Mulțimea soluțiilor este:

$$S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Observație. În general, nu este indicat să ridicăm la pătrat o ecuație trigonometrică, din cauză că pot apărea în plus mulțimi infinite de „soluții străine". Tocmai de aceea, aici, unde am fost nevoiți să ridicăm la pătrat, când am rezolvat ecuațiile $\cos 2t=0$, $\cos 2t=-1$, am preferat să scriem cu ajutorul lui $\sin t$ și să ținem seama că $\sin t>0$.

Problemă propusă pentru clasa a X-a

Enunț:

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\left(2^x-3\cdot 2^{-x}\right)\cdot x+2^{-x}-2^x=3\cdot x^2-4x$.

Prof. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Soluție:

Ecuația se poate scrie:
$2^x\left(x-1\right)+2^{-x}\left(1-3x\right)-3x^2+4x=0\Rightarrow 2^x\left(x-1\right)+2^{-x}\left(1-3x\right)+\left(x-1\right)\left(3x-1\right)+1=0$.

Notând $2^x=y>0, a=x-1, b=1-3x$ ecuația devine: $ay+\frac{b}{y}+ab+1=0$ de unde rezultă că

$ay^2+\left(ab+1\right)y+b=0\Rightarrow ay\left(y+b\right)+\left(y+b\right)=0\Rightarrow \left(ay+1\right)\left(y+b\right)=0\Rightarrow y_1=-\frac{1}{a}, a\neq 0, y_2=-b$.

Revenind la substituții:

- dacă $a=0\Rightarrow x=1$ valoare ce verifică și ecuația inițială;
- dacă $a\neq 0\Rightarrow 2^x=-\frac{1}{x-1}\Rightarrow 2^{-x}=1-x\Rightarrow x_1=0, x_2=-1$,ecuația având exact cele două soluții, deoarece intersecția dintre graficul unei funcții convexe și a unei funcții liniare poate avea cel mult două puncte .

Pentru ecuația $y=-b\Rightarrow 2^x=3x-1\Rightarrow x_3=1, x_4=3$ acestea fiind singurele soluții din aceleași considerente ca mai sus.

În concluzie, ecuația are 4 soluții reale $x\in\left\{-1,0,1,3\right\}$.

Problemă clasa a X-a

Să se arate că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z^{2017} = -1\}$

$\frac{1-z^{2017}}{1+z^{2017}} \in i\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $|z| = 1$.

unde $i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid z = 0 + bi \mid b \in \mathbb{R}\}$.

Costică Ambrinoc

Soluție

Fie $n = 2017$.

Dacă $|z| = 1 \Rightarrow z = \cos t + i \sin t$

$$\frac{1-z^{2017}}{1+z^{2017}} = \frac{1 - \cos nt - i \sin nt}{1 + \cos nt + i \sin nt} = \frac{2\sin^2 \frac{nt}{2} - 2i \sin \frac{nt}{2} \cos \frac{nt}{2}}{2\cos^2 \frac{nt}{2} + 2i \sin \frac{nt}{2} \cos \frac{nt}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{nt}{2} \left(\sin \frac{nt}{2} - i \cos \frac{nt}{2} \right)}{\cos \frac{nt}{2} \left(\cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2} \right)} = i \operatorname{tg} \frac{nt}{2} \cdot \frac{\cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2}}{\cos \frac{nt}{2} + i \sin \frac{nt}{2}} =$$

$$= i \operatorname{tg} \frac{nt}{2} \in i\mathbb{R}.$$

Dacă $\frac{1-z^{2017}}{1+z^n} \in i\mathbb{R} \Rightarrow \frac{1-z^n}{1+z^n} = bi \Leftrightarrow z^n = \frac{1-bi}{1+bi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |z^n| = \frac{\sqrt{1+b^2}}{\sqrt{1+b^2}} \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1.$$

Problemă cl. a XI-a „Speranțe Râmnicene"

Fie $a>b>0$ și șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1>0$, $x_{n+1}=\frac{ax_n+b}{bx_n+a}$, pentru $n\geq 1$. Să se demonstreze că $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent și să se determine $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Marcel Țena

Soluție. Arătăm că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este monoton și mărginit.

Monotonia. Calculăm diferența $x_{n+1}-x_n$. Pentru $n\geq 2$ avem:

$$x_{n+1}-x_n=\frac{ax_n+b}{bx_n+a}-\frac{ax_{n-1}+b}{bx_{n-1}+a}=\frac{abx_nx_{n-1}+a^2x_n+b^2x_{n-1}+ab-abx_{n-1}x_n-b^2x_n-a^2x_{n-1}-ab}{(bx_{n-1}+a)(bx_n+a)}=$$

$$=\frac{(a^2-b^2)(x_n-x_{n-1})}{(bx_{n-1}+a)(bx_n+a)}=k(n)(x_n-x_{n-1}) \text{ cu } k(n)>0.$$

Rezultă că diferența $x_{n+1}-x_n$ are același semn cu diferența x_n-x_{n-1} pentru orice $n\geq 2$, prin urmare:

- șirul este crescător dacă $x_2\geq x_1$ (echivalent, $x_1\leq 1$).
- șirul este descrescător dacă $x_2\leq x_1$ (echivalent, $x_1\geq 1$).

Mărginirea. Deoarece $a>b$, avem:

$$0<x_n=\frac{ax_{n-1}+b}{bx_{n-1}+a}<\frac{ax_{n-1}+a}{bx_{n-1}+b}=\frac{a}{b}, \text{ pentru orice } n\geq 2,$$

prin urmare șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Limita. Conform teoremei lui Weierstrass șirul este convergent și fie $L=\lim\limits_{n\to\infty} x_n\in\mathbb{R}$. Trecând la limită în relația de recurență, avem:

$$L=\frac{aL+b}{bL+a} \Leftrightarrow L^2=1 \text{ și cum } L\geq 0, \text{ rezultă } L=1.$$

Observație. O altă soluție ar fi următoarea. Avem $x_{n+1}=f(x_n)$, unde $f(x)=\frac{ax+b}{bx+a}$. Funcția $f:[0,\frac{a}{b}]\to[0,\frac{a}{b}]$ este o contracție, deoarece pentru orice $x,y\in[0,\frac{a}{b}]$ avem $|f(x)-f(y)|=\left|\frac{(a^2-b^2)(x-y)}{(bx+a)(by+a)}\right|\leq\frac{a^2-b^2}{a^2}\cdot|x-y|=c|x-y|$, unde $c=1-\frac{b^2}{a^2}<1$.

Atunci, conform principiului contracției al lui Banach, șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent către unicul punct fix al funcției f care este 1.

Problemă pentru Clasa a XI-a

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Solution. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}{n}\cdot\dfrac{n+1}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}\cdot\dfrac{n}{n+1}\right)$, (1).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(2n-1)!!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n+1)!!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(2n-1)!!}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{e},\ (2).$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e^2},\ (3).$$

Din (1), (2) şi (3) obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{\sqrt{2!}\cdot\sqrt[3]{3!}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n]{n!}}}{\sqrt[n+1]{(2n+1)!!}}=\dfrac{1}{e^2}\cdot\dfrac{e}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2e}$.

Clasa a XI-a

Să se rezolve în $M_2(\mathbf{R})$ ecuaţia : $X^{2018}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 8 & 12\end{pmatrix}$.

Antohe Florin, profesor Galat

Soluţie :

det(X^{2018})=0 , $(\det X)^{2018}=0$ de unde det X=0.

Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, det(X)=a·d-b·c=0.

Din relaţia Cayley-Hamilton , rezultă :

$$X^{2018}=(a+d)^{2017}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=(TrA)^{2017}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

Obţinem sistemul:

$$\begin{cases}(a+d)^{2017}a=4\\ (a+d)^{2017}b=6\\ (a+d)^{2017}c=8\\ (a+d)^{2017}d=12\end{cases}$$

Din prima şi ultima ecuaţie rezultă că: $(a+d)^{2018}=16$, de unde $a+d=16^{\frac{1}{2018}}$, sau $a+d=-16^{\frac{1}{2018}}$

deci $(a+d)^{2017}=16^{\frac{2017}{2018}}=p$ sau

$(a+d)^{2017}=-16^{\frac{2017}{2018}}=-p$

Înlocuind în cele patru relaţii obţinem :

$a=\frac{4}{p};b=\frac{6}{p};c=\frac{8}{p};d=\frac{12}{p}$ sau $a=-\frac{4}{p};b=-\frac{6}{p};c=-\frac{8}{p};d=-\frac{12}{p}$

Deci soluţia ecuaţiei este : $X=\frac{1}{p}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 8 & 12\end{pmatrix}$, sau $X=-\frac{1}{p}\begin{pmatrix}4 & 6\\ 8 & 12\end{pmatrix}$.

Antohe Florin, profesor Galati

Problemă propusă pentru clasa a XII-a

Fie funcția $f:[0,1]\to[0,+\infty)$ continuă și strict crescătoare, și n un număr natural nenul. Arătați că: $\int_0^1 x^n f(x)\,dx \le \frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\,dx$

În ce caz avem egalitate?

C. Rus

Soluție. Avem: $0\le x\le 1 \Leftrightarrow 0\le x^n\le 1 \Rightarrow x^n f(x)\le f(x)$.

Integrând inegalitatea obținută obținem:

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \overset{mg\le ma}{\le} \int_0^1 \left(\frac{1+f(x)}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}+\frac{f(x)}{2}+\frac{f^2(x)}{4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx+\frac{1}{4}\int_0^1 f^2(x)\,dx$$ adică tocmai inegalitatea cerută demonstrată.

Egalitate dacă $f(x)=1$ și cum $f=f$ este bijectivă $\Rightarrow (\exists)\, x_0\in[0,1]$, unic astfel încât $f(x_0)=1$ și cu aceștia avem: $\int_0^1 x_0^n\cdot 1\,dx=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^n=1\Leftrightarrow x_0=1$

Problemă propusă pentru clasa a XII-a

Enunț:

Să se calculeze: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2n+\dfrac{3^2}{5}}+\dfrac{1}{2n+\dfrac{5^2}{7}}+\dfrac{1}{2n+\dfrac{7^2}{9}}+\ldots+\dfrac{1}{2n+\dfrac{(2n+1)^2}{2n+3}}\right)$.

Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Soluție:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n+\frac{3^2}{5}}+\frac{1}{2n+\frac{5^2}{7}}+\frac{1}{2n+\frac{7^2}{9}}+\ldots+\frac{1}{2n+\frac{(2n+1)^2}{2n+3}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1+\frac{3^2}{5\cdot 2n}}+\frac{1}{1+\frac{5^2}{7\cdot 2n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{(2n+1)^2}{(2n+3)\cdot 2n}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{(2k+1)^2}{2n(2k+3)}}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\xi_k}\right)=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\frac{1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^1=\ln\sqrt{2}\ .$$

unde

$$f:[0,1]\to\square,\ f(x)=\frac{1}{1+x},\ \Delta_n=\left(0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\ldots<\frac{n}{n}=1\right),\ \lim_{n\to\infty}\|\Delta_n\|=0,\ \xi_k=\frac{(2k+1)^2}{2n(2k+3)}$$

Cum $k-1<\dfrac{(2k+1)^2}{2(2k+3)}<k,(\forall)k=\overline{1,n}\Rightarrow\xi_k\in\left[\dfrac{k-1}{n},\dfrac{k}{n}\right](\forall)k=\overline{1,n}$.

Problemă cl. a XII-a „Speranțe Râmnicene"

Fie $f \in \mathbb{Q}[X]$ un polinom de grad 2, ireductibil în inelul $\mathbb{Q}[X]$, ale cărui rădăcini sunt x_1 și x_2. Să se demonstreze că:

a) Există și este unic un întreg liber de pătrate $d \neq 1$ astfel încât corpul

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{x + y\sqrt{d} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$$

conține rădăcinile x_1 și x_2 ale polinomului f.

b) Există și este unic un automorfism φ al corpului $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ astfel încât $\varphi(x_1) = x_2$ și $\varphi(x_2) = x_1$.

Marcel Țena

Soluție. a) Fie $f = aX^2 + bX + c$ cu $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Deoarece f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ rezultă că $x_1, x_2 \notin \mathbb{Q}$, deci $\Delta = b^2 - 4ac = q^2 d$, cu $q \in \mathbb{Q}^*$ și $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, liber de pătrate. Atunci:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm q\sqrt{d}}{2} = -\frac{b}{2} \pm \frac{q}{2}\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}).$$

Dacă ar mai exista un $d' \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$, liber de pătrate, $d' \neq d$, astfel încât $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{d'})$, atunci $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{d'}) = \mathbb{Q}$, contradicție. Așadar, d este unic.

b) Automorfismul „conjugare pătratică" $\varphi: \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\varphi(x + y\sqrt{d}) = x - y\sqrt{d}$ verifică enunțul, întrucât x_1 și x_2 sunt conjugate pătratic.

Acest automorfism este unic, întrucât singurele automorfisme ale corpului pătratic $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ sunt funcția identică și conjugarea pătratică, iar funcția identică nu verifică enunțul.

Observație. „Unicitățile" pot fi punctate puțin, căci au în spate" două „fapte de „cultură matematică" și anume:

1) $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{d'}) = \mathbb{Q}$, dacă $d \neq d'$;

2) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q}(\sqrt{d})) = \{1_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}; 1^*_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}\}$.

Deși se demonstrează destul de ușor, aceste fapte pot fi prezupse cunoscute. Ele apar ca problemele K30, K29 în cartea mea „Probleme de structuri algebrică" (cu C. Năstăsescu, Gh. Andrei, I. Otărăzanu, Ed. Acad. 1988)